Квантовая механика. Физический факультет, 4 курс, 7 семестр.

Занятия № 8а-9а. ***<u>Повторение</u>*** ***материала прошлого семестра: основные формулы и понятия квантовой механики.***

1. ***Основные формулы и понятия***

1. Длина волны Де-Бройля.
2. Волновая функция. Физический смысл волновой функции.
3. Определение эрмитова оператора. Уравнение на собственные функции и собственные значения. Свойства собственных функций и собственных значений эрмитова оператора.
4. Среднее значение оператора физической величины.
5. Определение коммутатора двух операторов
6. Волновое уравнение Шредингера.
7. Стационарное уравнение Шредингера. Оператор Гамильтона.
8. Операторы координаты и импульса.
9. Гамильтониан гармонического осциллятора.
10. Соотношение неопределенностей для координаты и импульса.
11. Понятие спина. Принцип Паули.
12. Качественно пояснить характер движения частицы в поле с потенциальной энергией $U(x)$ заданного вида.

2. ***Рассмотреть движение квантовой частицы в поле двух дельта-потенциалов*** $U(x) = \alpha_1 \delta(x + a_1) + \alpha_2 \delta(x - a_2);\ a_{1,2} > 0$. ***Знаки*** $\alpha_{1,2}$ ***– любые.*** (Д/з – закончить эту задачу)

<u>Новая тема</u>: ***Оператор углового момента. Коммутационные соотношения. Собственные функции и собственные значения операторов*** $\hat{l}_z$ ***и*** $\hat{\vec{l}}^{\,2}$***. «Лестничные операторы».***

1. Оператор углового момента.

1.1. Определение оператора углового момента $\hat{\vec{L}}$ в декартовых координатах:

$$\hat{\vec{L}} = \hat{\vec{r}} \times \hat{\vec{p}} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \hat{p}_x & \hat{p}_y & \hat{p}_z \end{vmatrix}; \quad \hat{\vec{r}} = \vec{r}, \quad \hat{\vec{p}} = -i\hbar\nabla = -i\hbar\frac{\partial}{\partial\vec{r}},$$

В тензорных обозначениях:

$$\hat{L}_i = \varepsilon_{ijk}\hat{x}_j\hat{p}_k,$$

ε_{ijk} – символ Леви-Чивита.

$$\hat{L}_x = \hat{y}\hat{p}_z - \hat{z}\hat{p}_y, \quad \hat{L}_y = \hat{z}\hat{p}_x - \hat{x}\hat{p}_z, \quad \hat{L}_z = \hat{x}\hat{p}_y - \hat{y}\hat{p}_x,$$
$$\hat{\vec{L}}^2 = \hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2 + \hat{L}_z^2.$$

<u>Задача 1.</u> Проверить коммутационные соотношения:

$$\left[\hat{L}_i,\hat{x}_j\right]=i\hbar\varepsilon_{ijk}\hat{x}_k;\quad \left[\hat{L}_i,\hat{p}_j\right]=i\hbar\varepsilon_{ijk}\hat{p}_k;\quad \left[\hat{L}_i,\hat{L}_j\right]=i\hbar\varepsilon_{ijk}\hat{L}_k;\quad \left[\hat{\vec{L}}^2,\hat{L}_i\right]=0.$$

<u>Задача 2.</u> Вычислить $\left[\hat{L}_i,\hat{\vec{r}}^{\,2}\right]$ (Из ГКК № 3.4(а))

1.2. Безразмерный оператор углового момента $\hat{\vec{l}}$:

$$\hat{\vec{l}}=\frac{1}{\hbar}\hat{\vec{L}};\quad \left[\hat{l}_i,\hat{l}_j\right]=i\varepsilon_{ijk}\hat{l}_{jk};\quad \left[\hat{\vec{l}}^{\,2},\hat{l}_i\right]=0.$$

1.3. Операторы $\hat{l}_z$ и $\hat{\vec{l}}^{\,2}$ в сферических координатах:

$$\hat{l}_z=-i\frac{\partial}{\partial\varphi};\quad \hat{\vec{l}}^{\,2}=-\Delta_{\theta\varphi}=-\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right].$$

1.4. Собственные функции и собственные значения операторов $\hat{l}_z$ и $\hat{\vec{l}}^{\,2}$:

$$\hat{\vec{l}}^{\,2}Y_{lm}(\theta,\varphi)=l(l+1)Y_{lm}(\theta,\varphi),\quad l=0,1,2,3,...;$$
$$\hat{l}_zY_{lm}(\theta,\varphi)=mY_{lm}(\theta,\varphi),\quad m=0,\pm1,\pm2,...,\pm l.$$

l – орбитальное квантовое число, m – магнитное квантовое число.

Сферические функции: $Y_{lm}(\theta,\varphi)=C_{lm}P_l^m(\theta)e^{im\varphi}$;

$$P_l^m\left(\cos\theta\right)=\sin^m\theta\frac{d^m}{\left(d\cos\theta\right)^m}P_l\left(\cos\theta\right);\quad P_l\left(\cos\theta\right)=\frac{1}{2^l\,l!}\frac{d^l}{\left(d\cos\theta\right)^l}\left(\cos^2\theta-1\right)^l,$$

где $P_l^m(\theta)$ – присоединенные полиномы Лежандра, $P_l\left(\cos\theta\right)$ – полиномы Лежандра, C_{lm} – нормировочная константа.

1.4. «Лестничные операторы» $\hat{l}_\pm$:

$$\hat{l}_\pm=\hat{l}_x\pm i\hat{l}_y.$$

Задача 3. Проверить коммутационные соотношения

$$\left[\hat{l}_z,\hat{l}_\pm\right]=\pm\hat{l}_\pm;\quad \left[\hat{l}_+,\hat{l}_-\right]=2\hat{l}_z.$$

Задача 4. Показать, что $\hat{l}_\pm\psi_m$, где ψ_m – собственные функции оператора $\hat{l}_z$ z-проекции углового момента $\left(\hat{l}_z\psi_m=m\psi_m,\quad m=0,\pm1,\pm2,...\right)$, также являются собственными функциями оператора $\hat{l}_z$ с собственными значениями $m+1$ и $m-1$ для $\hat{l}_+$ и $\hat{l}_-$ соответственно (ГКК №3.11)

Задача 5. Найти собственные значения оператора $\hat{\vec{l}}^{\,2}$. Использовать коммутационные соотношения из **задачи 3.**

Задача 6. В состоянии ψ_m с определенной проекцией углового момента на ось z вычислить средние значения $\overline{l_x}, \overline{l_y}, \overline{l_z}, \overline{l_x l_y}, \overline{l_y l_x}, \overline{l_x^2}, \overline{l_y^2}, \overline{l_z^2}$. (ГКК №3.12)

Домашнее задание ГКК № 3.4(а), ГКК № 3.12 (закончить), 3.13, 3.14.

ГКК - Галицкий Е.М., Карнаков Б.М., Коган В.И. Задачи по квантовой механике, 1981; Гр. - Гречко Л.Г., Сугаков В.И., Томасевич О.Ф., Федорченко А.М. Сборник задач по теоретической физике, 1984